リーマン面上の単純閉曲線が分割曲線となるための必要十分条件 (双曲空間とその関連分野 II)

奥村, 善英

数理解析研究所講究録
1163巻 2000年 28-41

リーマン面上の単純閉曲線が分割曲線となるための必要十分条件

静岡大学理学部　奥村善英 (Yoshihide OKUMURA)

0 序論

この小論では、Okumura [10] で扱った内容を詳しく議論し、次の結果を報告する：**(コンパクトとは限らない) 双曲型リーマン面 S 上の単純閉曲線が分割曲線であるための必要十分条件は、S を表現するフックス群 G の行列群 $SL(2,\mathbb{C})$ への持ち上げのある性質のみで与えられる**（詳しい主張は、定理 4.1, 4.2, 4.5 を参照せよ)。

Okumura [10] では、「S 上の単純閉曲線が分割曲線ならば、G の持ち上げはその性質を満たす」という主張を述べた。しかし、当時得ていた証明は煩雑で、紙面の関係もあり、示さなかった。

その当時の主張と証明について、J. Gilman, L. Keen, I. Kra, B. Maskit, G. Rosenberger 教授達等と議論する機会があった。筆者が示した方法「S を単純分割閉曲線を含むような部分曲面に分割し、最終的には、簡単な曲面の場合に帰着させる。そして、この議論が部分曲面のとり方に依らないことを述べる。」は自然な方法だと、彼らから意見を頂いた。

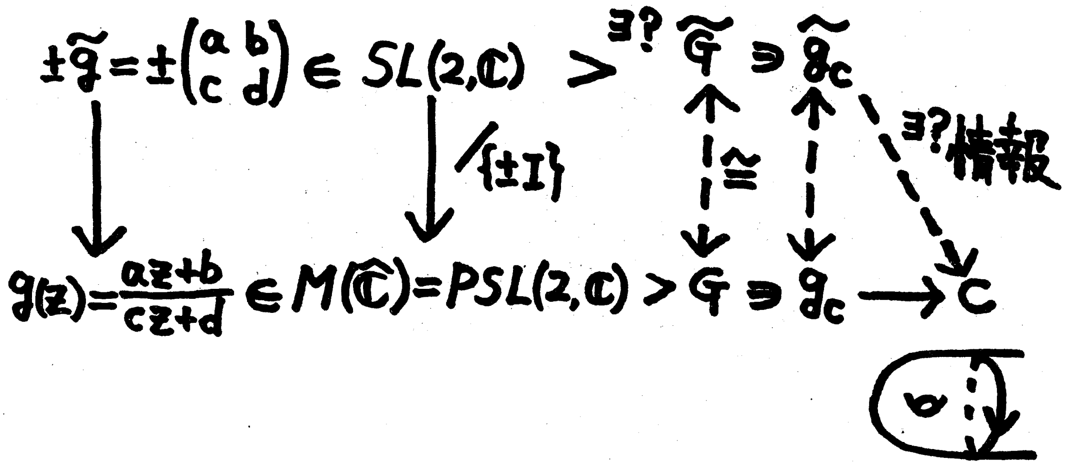
しかし、筆者は何か別の簡明な方法があり、逆の主張までも同様な方法で示せるのではと考えていた。現段階では、フックス群の融合積の持ち上げに関する性質（定理 2.3, 2.4 等を参照せよ）に注目することで、より簡単な証明を得た。実際、単純分割閉曲線は曲面を2つの部分曲面に分割し、これら三つの基本群（フックス群と同型）が融合積で関係付けられていることを考えれば、自然な証明方法であると思える。

また、この研究集会「Hyperbolic Spaces and Related Topics II」の講演後、東工大の志賀啓成教授から、定理 4.1 の (2) $\Rightarrow$ (1) の別証明を教えて頂いた。

第1節では、一次変換群の持ち上げ問題について復習する。第2節で

は、フックス群及びこれらの融合積の持ち上げの性質を考える。第3節では、第4節で必要となるリーマン面上の単純閉曲線の性質を述べる。最後に、第4節では、双曲型リーマン面上の単純閉曲線が分割しているための必要十分条件をフックス群の持ち上げを用いて示す。

1　持ち上げ問題の復習



一次変換群 $M(\hat{\mathbb{C}})$ は、$SL(2,\mathbb{C})/\{\pm I\}$ に群同型となることから、$SL(2,\mathbb{C})$ の**射影** $PSL(2,\mathbb{C})$ といわれる。

この対応関係により、多くの概念が $SL(2,\mathbb{C})$ から $M(\hat{\mathbb{C}})$ に誘導されている。

例えば、一次変換のトレースや $M(\hat{\mathbb{C}})$ の位相がある。

一次変換 g の二つの行列表現は g の二つの**持ち上げ**ともいわれる。

筆者はタイヒミュラー空間の座標付けを考察中に、$M(\hat{\mathbb{C}})$ の部分群 G の**持ち上げ問題**を思いついた。

これは、「**G の各元にたいし、二つの行列表現（持ち上げ）の一方を上手に選ぶと、これら全体が G と同型な行列群になるか？**」という問題である。できるとき、G を**持ち上げ可能**という。

例えば、G が

$$< g_1, g_2, \ldots, g_n \mid w_1(g_1, g_2, \ldots, g_n) = \ldots = w_m(g_1, g_2, \ldots, g_n) = id >$$

（ただし、$1 \leq n \leq \infty, 0 \leq m \leq \infty$）と表示されると、

Theorem 1.1. 次の二つは同値となる:
(1) G が持ち上げ可能である。
(1) G の各生成元の行列表現 $\widetilde{g_j}$ $(1 \leq j \leq n)$ を

$$w_k(\widetilde{g_1}, \widetilde{g_2}, \ldots, \widetilde{g_n}) = I \ (0 \leq k \leq m)$$

（ただし、I は単位行列）を満たすようにとれる。

実際、**上式を満たす** G **の各生成元の行列表現がとれれば、**G の任意の元を $F(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ と表示するとき、行列表現 $F(\widetilde{g_1}, \widetilde{g_2}, \ldots, \widetilde{g_n})$ を対応させることで、G **の一つの持ち上げが定義できる。**
さらに、**この方法で** G **のすべての持ち上げを構成できる。**
この定理から、G **が自由群の場合には持ち上げの存在は自明となる**が、関係子をもつ群の場合には、持ち上げの存在は明らかといえない。
簡単な例を一つあげる：

Example 1.2. n を 2 以上の自然数として、位数 n の楕円型変換 $g(z) = e^{2\pi i/n}z$ を考える。
このとき、g の行列表現

$$\tilde{g} := \begin{pmatrix} -e^{\pi i/n} & 0 \\ 0 & -e^{-\pi i/n} \end{pmatrix}$$

にたいしては、$(-\tilde{g})^n = -I$ かつ $(\tilde{g})^n = (-1)^{n+1}I$ となる。
よって、**群** $< g \mid g^n = id >$ **が持ち上げ可能であることと、**g **の位数** n **が奇数であることは同値になる。**
さらに、この場合には、**群に位数 2 の元はなく、**g **の持ち上げは** $\tilde{g}$ **とトレースが負の行列表現になる。**

まず、次のことが明らかに成り立つ：

Lemma 1.3. (1) 一つの群が持ち上げ可能なら、これと同型な群や部分群も持ち上げ可能となる。
(2) 逆に、一つの群が持ち上げ不可能ならば、これと同型な群そして拡大群も持ち上げ不可能となる。

この補題と上の例から、次のことも容易に分かる：

Lemma 1.4. **位数** 2 **の楕円型変換**を含む群は、持ち上げ不可能となる。

一般に、与えられた群の表示を求めることが困難なように、持ち上げ可能であるかの判定は容易ではない。これから、次の問題が自然に考えられる：

Problem 1.5. (i)$M(\hat{\mathbb{C}})$ の部分群 G はいつ持ち上げ可能か？
(ii)G が持ち上げ可能のとき、どのような特徴を持つのか？

問題 (i) に関しては、今世紀初頭から、(多くは、種数 $q(\geq 2)$ のコンパクト・リーマン面を表現するフックス群の場合について)、多くの研究者達により考察されている有名な問題であることが分かった。例えば、Kra [5] 及びその参考文献を参照せよ。

問題 (i) に関しては、次の結果が得られる：

Theorem 1.6. (Culler [1]) $M(\hat{\mathbb{C}})$ の離散部分群にたいしては、**持ち上げ可能であることと、位数** 2 **の楕円型変換を含まないことは同値**となる。

Corollary 1.7. (Kra [5], Culler [1], etc.) フックス群にたいしても、**持ち上げ可能であることと、位数** 2 **の楕円型変換を含まないことは同値**となる。

これから、$M(\hat{\mathbb{C}})$ の離散部分群にたいしては、補題 1.4 の条件が持ち上げの唯一の障害となることが分かった。

第 2 節と第 4 節で、問題 1.5 (ii) に関して考察しよう。

2 フックス群の持ち上げの性質

この節では、フックス群及びこれらの融合積の持ち上げの性質や個数等について調べよう。

Definition 2.1. 種数 q で r 個の分岐点を持つコンパクト・リーマン面から s 個の点と t 個の閉円板を除いて得られる面を表現するフックス群を、(q,r,s,t) **型**であるという。また、このようなリーマン面も (q,r,s,t) **型**という。これらの q,r,s,t がすべて有限のときには、**位相的有限型**という。

定義より、リーマン面 S（あるいはフックス群 G）が位相的有限型ならば、S の基本群（あるいは G）は有限表示となる。

また、(q,r,s,t) 型フックス群は、

$$2q+r+s+t \geq 3$$

を満たしている。実際、このフックス群で表現されるリーマン面が**双曲型**になることから、この不等式を得る。

定理 1.1 の後でも述べたように、**群の持ち上げは、生成元の像（行列表現）を指定することで、一意的に決定される。**

フックス群の場合には、標準生成元系とその関係子に注目して、各生成元の行列表現を選ぶことで、持ち上げの個数が次のようになる：

Lemma 2.2. G を位数 2 の楕円型変換を含まない有限生成フックス群とする。このとき、分岐点に対応する標準生成元系の生成元があれば、G の任意の持ち上げにたいし、この元はいつも負のトレースを持つ行列表現にうつる。

さらに、G の持ち上げの個数は、

(i)G が $(q,r,0,0)$ 型のとき、2^{2q} 個、

(ii)G が (q,r,s,t) 型（但し、$s+t \geq 1$）のとき、$2^{2q+s+t-1}$ 個となる。

特に、$s+t=1$ の場合には、G の任意の持ち上げにたいし、**唯一つの境界成分 (つまり、パンクチャーまたは穴) に対応する G の任意の元は、いつでもトレースが負の行列表現にうつる。**

次に、フックス群が融合積で表される場合に、持ち上げとその個数について考えよう。まず、記号を準備する:

G, G_1, G_2 を単位円板 $\mathbb{D}$ に作用するフックス群とし、G は

$$G = G_1 * G_2 \text{ am} < g_1 = g_2 >, \quad g_j \in G_j \ (j=1,2)$$

と融合積で表されているとする。

補題 1.3 より、G **が持ち上げ可能なら、**G_1, G_2 **も持ち上げ可能となる。**

この逆の主張に関しては、次の定理を得る：

Theorem 2.3. G_1, G_2 が持ち上げ可能とする。このとき、次の二つは同値となる:

(i) G は持ち上げ可能となる。

(ii) G_1 の持ち上げ $\widetilde{G_1}$ による g_1 の像 $\widetilde{g_1}$ と G_2 の持ち上げ $\widetilde{G_2}$ による g_2 の像 $\widetilde{g_2}$ で、トレースの符号を一致させる（つまり、$\widetilde{g_1} = \widetilde{g_2}$ となる）持ち上げが存在する。

G, G_1, G_2 の持ち上げの関係に関しては、次の定理を得る：

Theorem 2.4. G が持ち上げ可能とする。このとき、G の任意の持ち上げは、G_1, G_2 の持ち上げ $\widetilde{G_1}, \widetilde{G_2}$ で $\widetilde{g_1} = \widetilde{g_2}$ を満たすものから、

$$\widetilde{G_1} * \widetilde{G_2} \text{ am } < \widetilde{g_1} = \widetilde{g_2} >$$

と得られる。逆に、このような融合積はすべて G の持ち上げとなる。

これから、G の持ち上げの個数は

$$N_1^- * N_2^- + N_1^+ * N_2^+.$$

ただし、G_j の持ち上げのなかで g_j が負 (resp. 正) のトレースを持つ行列表現にうつるものすべての個数を、N_j^- (resp. N_j^+) とする ($j = 1, 2$)。

3 リーマン面上の単純閉曲線の性質

この節では、次節のための準備をいくつか行う。

Definition 3.1. （連結な）曲面上の単純閉曲線が、この曲面を二つの連結集合に分け、境界成分または一点にホモトピックでないとき、**分割している**といわれる。

次の三つの定理に注目しよう：

Theorem 3.2. (q, r, s, t) 型の双曲型リーマン面が単純分割閉曲線を含むことと、

$$2q + r + s + t \geq 4$$

は同値となる（注意 4.4 を参照せよ）。

Theorem 3.3. S を双曲型リーマン面とし、c_1 を S 上の分割しない単純閉曲線とする。

このとき、S 上の分割しない単純閉曲線 c_2 で、$i(c_1, c_2) = 1$ となるものがとれる。ただし、$i(\cdot, \cdot)$ は幾何学的交点数を表す。

Theorem 3.4. S を双曲型リーマン面とし、c_1, c_2 は S 上の単純閉曲線で $i(c_1, c_2) = 1$ を満たすものとする。このとき、次が成り立つ:

(1) c_1 と c_2 は分割しない単純閉曲線となる。

(2) c_1 と c_2 の交換子 $c_1 c_2 c_1^{-1} c_2^{-1}$ は単純分割閉曲線となる。

(3) $(c_1^{\varepsilon}, c_2^{\eta}, (c_1^{\varepsilon} c_2^{\eta} c_1^{-\varepsilon} c_2^{-\eta})^{-1})$ $(\varepsilon, \eta = 1 \text{ or } -1)$ は $(1, 0, 0, 1)$ 型ニールセン核の標準生成元系となる。

4 単純閉曲線が分割しているための必要十分条件

フックス群 G の任意の元は、G が表現するリーマン面 S 上のある閉曲線に対応している。

G の持ち上げを調べていると、S 上の特定の閉曲線は持ち上げで特徴付け可能だろうと思いついた。ここでは、S 上の単純分割閉曲線を、G の持ち上げで特徴付けできることを定理 4.1, 4.2, 4.5 の順で示そう。

まず、記号を準備する:

S を（任意の）(q, r, s, t) 型の双曲型リーマン面とし、c を S 上の (任意の) 単純閉曲線とする。また、G を S を表現し、$\mathbb{D}$ に作用する (任意の) フックス群とする。そして、g_c を c に対応する G の（任意の）元とする。

$$\begin{array}{ccc} S & \longleftarrow & G \\ \cup & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ c & \longleftarrow & g_c \end{array}$$

S がコンパクトのとき、分岐点を持つ場合と持たない場合がある。S **が分岐点を持たないコンパクトの場合**から考えていこう。

Theorem 4.1. S を $(q, 0, 0, 0)$ 型（$q \geq 2$ となる）とする。このとき、次の二つは同値となる:

(1) c は S 上の単純分割閉曲線となる。

(2) G の任意の持ち上げ（2^{2q} 個ある）にたいし、g_c はいつでも負のトレースを持つ行列表現にうつる。

この定理より、ある G の一つの持ち上げにより、ある g_c が正のトレースを持つ行列表現にうつれば、c は S 上の単純分割閉曲線でないことが分かる。

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) を以下の 5 つのステップに分けて示そう：

(i) (2) の否定を仮定：

G のある持ち上げにたいし、g_c の像 $\widetilde{g_c}$ が $\mathrm{tr}(\widetilde{g_c}) > 0$ になると仮定する。

(ii) $S-c$ に関係する２つのフックス群 H_1, H_2 を構成：

$S-c$ は２つの連結なリーマン面（S_1, S_2 とおく）を定める。このとき、S_1, S_2 は双曲型となる。実際、S_1 または S_2 の種数が 0 つまり $(0,0,0,1)$ 型なら、円板と同相となり、S 上 c が１点集合とホモトピックとなり矛盾する。よって、S_i を $(q_i, 0, 0, 1)$ 型（但し、$q_i \geq 1, q_1+q_2=q$）と表せる（$i=1,2$）。$2q_i+1-2>0$ より、S_i は双曲型となる。

これから、S_i を表現する単位円板 $\mathbb{D}$ に作用するフックス群（H_i とおく）がとれる。H_i は $(q_i, 0, 0, 1)$ 型より、系 1.7 から、当然持ち上げ可能となる。

(iii) G を H_1, H_2 を用いて融合積で表示：

$h_{ic} \in H_i$ を c に対応する任意の元とする。このとき、適当な $h_i \in M(\mathbb{D})$ により、G を次のような融合積で表せる：

$$G = h_1 H_1 h_1^{-1} * h_2 H_2 h_2^{-1} \text{ am } < g_c = h_1 h_{1c} h_1^{-1} = h_2 h_{2c} h_2^{-1} > .$$

(iv) G の任意の持ち上げから、H_1 の持ち上げを構成：

$h_1 H_1 h_1^{-1}$ は G の部分群より、G の任意の持ち上げにたいして、そのある部分群（Γ_1 とおく）が $h_1 H_1 h_1^{-1}$ の持ち上げになる。$\widetilde{h_1}$ を h_1 の任意の行列表現としよう。このとき、$\widetilde{H_1} := \widetilde{h_1}^{-1} \Gamma_1 \widetilde{h_1}$ は H_1 の持ち上げとなる（$\widetilde{h_1}$ のとり方は２通りあるが、$\widetilde{H_1}$ は唯一つに定まっている）。このようにして、G の任意の持ち上げから、H_1 の持ち上げを得る。

(v) G と H_1 の持ち上げの矛盾性：

仮定より、G の持ち上げには、$\mathrm{tr}(\widetilde{g_c}) > 0$ となるものがある。この G の持ち上げから得られる H_1 の持ち上げ $\widetilde{H_1}$ 上、h_{1c} の像は $\widetilde{h_{1c}} := \widetilde{h_1}^{-1} \widetilde{g_c} \widetilde{h_1}$ となるので、

$$\mathrm{tr}(\widetilde{h_{1c}}) = \mathrm{tr}(\widetilde{g_c}) > 0.$$

一方、補題 2.2 より、H_1 の任意の持ち上げにたいし、唯一つの境界成分に対応する h_{1c} は負のトレースを持つ行列表現のみにうつる。これは矛盾である。

以上の (i)-(v) から、(2) の成立が分かる。

次に、(2) $\Rightarrow$ (1) を以下の５つのステップに分けて示そう：

(I) (1) の否定を仮定：

$c_1 := c$ が分割していないと仮定する。

(II) S と c_1 に関係する２つのフックス群 K_1, K_2 を構成：

定理 3.3, 3.4 から、S 上のある単純閉曲線 c_2 により、

$$(c_1^\varepsilon, c_2^\eta, (c_1^\varepsilon c_2^\eta c_1^{-\varepsilon} c_2^{-\eta})^{-1})\ (\varepsilon, \eta = 1 \text{ or } -1)$$

が $(1,0,0,1)$ 型ニールセン核（N とおく）の標準生成元系となるものがとれる。

R_1 を N を含む $(1,0,0,1)$ 型の双曲型リーマン面とし、R_2 を $S-N$ を含む $(q-1,0,0,1)$ 型の双曲型リーマン面とする。

このとき、K_j を単位円板 $\mathbb{D}$ に作用し、R_j を表現するフックス群とする（$j=1,2$）。系 1.7 から、K_j は持ち上げ可能となる。

(III) G を K_1, K_2 を用いて融合積で表示：

$c_1^\varepsilon c_2^\eta c_1^{-\varepsilon} c_2^{-\eta}$ に対応する G, K_1, K_2 の任意の元を g_0, k_{10}, k_{20} とする。このとき、適当な $k_j \in M(\mathbb{D})$ により、G を次のような融合積で表せる：

$$G = k_1 K_1 k_1^{-1} * k_2 K_2 k_2^{-1} \text{ am} < g_0 = k_1 k_{10} k_1^{-1} = k_2 k_{20} k_2^{-1} > .$$

(IV) G の任意の持ち上げを、K_1, K_2 の持ち上げから構成：

$\widetilde{K_j}$ を K_j の任意の持ち上げとする。このとき、$\widetilde{k_j}$ を k_j の任意の行列表現とすると、$\widetilde{k_j}\widetilde{K_j}\widetilde{k_j}^{-1}$ は、$k_j K_j k_j^{-1}$ の持ち上げとなる（$\widetilde{k_j}$ のとり方は2通りあるが、$k_j K_j k_j^{-1}$ の持ち上げは $\widetilde{K_j}$ から唯一つに定まっている）。

k_{j0} は R_j の唯一つの境界成分に対応する K_j の元より、補題 2.2 から、持ち上げ $\widetilde{K_j}$ 上、

$$\mathrm{tr}(\widetilde{k_{j0}}) < 0.$$

よって、$\widetilde{k_{10}}, \widetilde{k_{20}}$ のトレースが一致することから、K_1, K_2 の持ち上げのとり方によらず、

$$\widetilde{k_1}\widetilde{k_{10}}\widetilde{k_1}^{-1} = \widetilde{k_2}\widetilde{k_{20}}\widetilde{k_2}^{-1}. \tag{$*$}$$

よって、定理 2.3, 2.4 から、

$$\widetilde{k_1}\widetilde{K_1}\widetilde{k_1}^{-1} * \widetilde{k_2}\widetilde{K_2}\widetilde{k_2}^{-1} \text{ am} < (*) > \tag{$**$}$$

は G の持ち上げとなる。さらに、G の任意の持ち上げは、このような $(**)$ による構成から得られる。

(V) G と K_1 の持ち上げの矛盾性：

R_1 の標準生成元系 $(c_1^\varepsilon, c_2^\eta, (c_1^\varepsilon c_2^\eta c_1^{-\varepsilon} c_2^{-\eta})^{-1})$ に対応する K_1 の標準生成元系を $(k_{c_1}^\varepsilon, k_{c_2}^\eta, (k_{c_2}^{-\eta} k_{c_1}^{-\varepsilon} k_{c_2}^\eta k_{c_1}^\varepsilon)^{-1})$ とする。このとき、K_1 の持ち上げには、

$$\mathrm{tr}(\widetilde{k_{c_1}^\varepsilon}) > 0,\ \mathrm{tr}(\widetilde{k_{c_2}^\eta}) > 0,\ \mathrm{tr}(\widetilde{k_{c_2}^\eta k_{c_1}^\varepsilon}) > 0$$

で定まるものがある（例えば、Keen [3] を参照せよ）。

ゆえに、$(**)$ より G の持ち上げ上、c に対応する G の元 $g_c := k_1 k_{c_1} k_1^{-1}$ の像は、

$$\mathrm{tr}(\widetilde{g_c}) = \mathrm{tr}(\widetilde{k_1}\widetilde{k_{c_1}}\widetilde{k_1}^{-1}) = \mathrm{tr}(\widetilde{k_{c_1}}) = \mathrm{tr}(\widetilde{k_{c_1}^{\varepsilon}}) > 0$$

と、トレースが正の行列表現にうつる。これは矛盾である。

以上の (I)-(V) から、(1) の成立が分かる。 □

同様な議論から、S **が分岐点を持つコンパクトの場合**には、次の定理を得る：

Theorem 4.2. S を $(q, r, 0, 0)$ 型（但し、$r > 0$）とする。

G **が持ち上げ可能、つまり、**S **の分岐点の位数はすべて奇数である**と仮定する。

このとき、定理 4.1 の (1) と (2) の主張は同値となる。

次に、S **がコンパクトでない場合**を考えよう。

この場合にも、G **が持ち上げ可能となるように、**S **に分岐点があればその位数はすべて奇数である**と仮定する。

このときには、期待に反して、定理 4.1, 4.2 と同様の主張が成り立たない。実際、次の主張がが成り立つ：

Proposition 4.3. S を $s + t \geq 2$ を満たす任意の (q, r, s, t) 型の双曲型リーマン面で、単純分割閉曲線を含むものとする。

このとき、単純分割閉曲線のなかには、G のある持ち上げにより、正のトレースを持つ行列表現にうつるものがある。

定理 3.2 より、この命題の仮定は (q, r, s, t) の条件のみに翻訳でき、

$$2q + r + s + t \geq 4, \ s + t \geq 2$$

となる。

Proof. G の持ち上げには、G **の標準生成元系の各元を負のトレースを持つ行列表現にうつすもの**がある。仮定より、G には境界成分に対応する生成元が 2 個以上ある。**このうちの 2 個だけを正のトレースを持つ行列表現にうつす持ち上げも存在する**ことが分かる。これらの生成元を $X := X_1$ と X_2 で表そう。

以下、三つの場合に分けて示そう：

(1) $q=r=0$ の場合：

もし、境界成分に対応する標準生成元系の生成元が 3 個のみ、つまり、$(0,0,s,t)$ 型（但し、$s+t=3$）なら、S には単純分割閉曲線が存在しないことになる。よって、単純分割閉曲線が存在するためには、$s+t\geq 4$ が必要となる。

逆に、このとき境界成分に対応する標準生成元系の任意の二元にたいし、これらの積は単純分割閉曲線となり、これらの二元に対応する境界成分と他の境界成分を分離している。

よって、この場合には、単純分割閉曲線が存在することと $s+t\geq 4$ は同値となる。

ところで、仮定から、境界成分に対応する標準生成元系の元には、負のトレースを持つ行列表現にうつされるものがある。この一つの生成元を Y と表そう。

このとき、上で述べたことから、YX は単純分割閉曲線で X,Y に対応する境界成分とホモトピックでない。よって、$(X,Y,(YX)^{-1})$ または $(Y,X,(XY)^{-1})$ は $(0,0,s,t)$ 型（但し、$s+t=3, t\geq 1$）の標準生成元系となる。

ゆえに、X,Y の任意の行列表現を $\tilde{X},\tilde{Y}$ とすると、いつでも次の不等式を満たす：

$$\mathrm{tr}(\tilde{Y}\tilde{X})\mathrm{tr}(\tilde{Y})\mathrm{tr}(\tilde{X})<0,$$

(Okumura [6], [10] を参照せよ)。

当然、任意の G の持ち上げによる X,Y の像もこの不等式を満たすことになる。

これから、YX は単純分割閉曲線に対応するが、ここで考えた持ち上げにより、YX は正のトレースを持つ行列表現にうつることが分かる。

(2) $q=0, r>0$ の場合：

任意の一つの分岐点に対応する標準生成元系の元を D とする。補題 2.2 より、G の持ち上げはいつでも D を負のトレースを持つ行列表現にうつしている。

ここで、分岐点と境界成分に対応する標準生成元系の元が 3 個のみ、つまり、$(0,1,s,t)$ 型（但し、$s+t=2$）なら、S 上には単純分割閉曲線は存在しないことになる。したがって、単純分割閉曲線が存在するためには、$r+s+t\geq 4$ が必要となる。

逆に、このとき XD は単純分割閉曲線となり、D に対応する分岐点及び X に対応する境界成分と、他の分岐点及び他の境界成分を分離してい

る。よって、$(D, X, (XD)^{-1})$ または $(D, (DX)^{-1}, X)$ は $(0, 1, s, t)$ 型（但し、$s+t=2, t \geq 1$）の標準生成元系となる。

ゆえに、D, X の任意の行列表現を $\tilde{D}, \tilde{X}$ とすると、いつでも次の不等式を満たす：

$$\mathrm{tr}(\tilde{X}\tilde{D})\mathrm{tr}(\tilde{X})\mathrm{tr}(\tilde{D}) < 0,$$

（Okumura [6], [10] を参照せよ）。

よって、この場合も、XD は単純分割閉曲線に対応するが、ここで考えた持ち上げにより XD は正のトレースを持つ行列表現にうつることが分かる。

また、この場合には、単純分割閉曲線が存在することと $r+s+t \geq 4$ は同値となることも分かった。

(3) $q > 0$ の場合：

一つのハンドル部分に対応する G の標準生成元系の元を A_i, B_i とする。このとき、X_2A_i と X_2B_i は S 上の交点数が 1 の単純閉曲線に対応するので、定理 3.4 より、交換子 $C := (X_2B_i)^{-1}(X_2A_i)^{-1}(X_2B_i)(X_2A_i)$ は S 上の単純分割閉曲線となる。

これから、XC は単純分割閉曲線となり、C に対応するハンドル部分及び X に対応する境界成分と、分岐点や他のハンドル部分及び他の境界成分を分離している。よって、$(C, X, (XC)^{-1})$ または $(X, C, (CX)^{-1})$ は $(0, 0, s, t)$ 型（但し、$s+t=3, t \geq 2$）の標準生成元系となる。

ゆえに、C, X の任意の行列表現を $\widetilde{C}, \tilde{X}$ とすると、必ず次の不等式を満たす：

$$\mathrm{tr}(\tilde{X}\widetilde{C})\mathrm{tr}(\tilde{X})\mathrm{tr}(\widetilde{C}) < 0,$$

（Okumura [6], [10] を参照せよ）。

ここで、A_i, B_i, X_2 の任意の行列表現を $\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i, \widetilde{X}_2$ とし、

$$C^* := (\widetilde{X}_2\widetilde{B}_i)^{-1}(\widetilde{X}_2\widetilde{A}_i)^{-1}(\widetilde{X}_2\widetilde{B}_i)(\widetilde{X}_2\widetilde{A}_i)$$

とする。このとき、A_i, B_i, X_2 の行列表現のとり方によらず、C の行列表現 C^* は、次の不等式を満たす：

$$\mathrm{tr}(C^*) < 0,$$

（Okumura [10] を参照せよ）。

よって、ここで考えている持ち上げでは、C は負のトレースを持つ行列表現 C^* にのみにうつる。

したがって、XC は単純分割閉曲線に対応するが、ここで考えた持ち上げにより XC は正のトレースを持つ行列表現にうつることが分かる。

また、この場合には、単純分割閉曲線が存在することと命題の条件 $s+t \geq 2$ が同値となる。 $\square$

Remark 4.4. (i) 命題 4.3 の証明 (3) において、当然、交換子 $C_i := B_i^{-1}A_i^{-1}B_iA_i$ は単純分割閉曲線に対応している。しかし、もしも S が $(1,0,s,t)$ 型 （但し、$s+t=2$）なら、$i=1$ のみで、G の関係子は $X_2XC_1 = id$ または $XX_2C_1 = id$ となり、$XC_1 = X_2^{-1}$ または $XC_1 = XX_2^{-1}X^{-1}$ となる。よって、XC_1 は X_2^{-1} が指定する境界成分に対応し、単純分割閉曲線に対応しない。このため、ここでは C を用いて示した。

(ii) 命題 4.3 の証明中に述べたことを $s+t \leq 1$ の場合にも考えることで、定理 3.2 の成立が分かる。

しかし、コンパクトでない場合にも、次のように**持ち上げを制限する**と、定理 4.1, 4.2 （コンパクトの場合）と同様の証明方法で、次の定理を得る：

Theorem 4.5. S を (q,r,s,t) 型（但し、$s+t \geq 1$）とする。

このとき、S のパンクチャーと穴に対応する G の標準生成元系の生成元は $s+t$ 個ある。

これらの生成元をすべて負のトレースを持つ行列表現にうつす G **の持ち上げのみを考える。** このような G の持ち上げは 2^{2q} 個ある。

G の持ち上げをこのように制限すると、定理 4.1 の (1) と (2) の主張は同値となる。

また、G **の持ち上げの制限をこれ以上緩和すると、この主張は成り立たない。**

参考文献

[1] M. Culler, Lifting representations to covering groups, Adv. in Math., 59(1986), 64-70.

[2] G. Faltings, Real projective structures on Riemann surfaces, Compos. Math., 48(1983), 223-269.

[3] L. Keen, On Fricke moduli, in Advances in the Theory of Riemann Surfaces, (L. V. Ahlfors ed. et al.), Ann. Math. Studies 66, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971, 205-224.

[4] L. Keen, A correction to "On Fricke moduli", Proc. Amer. Math. Soc., 40(1973), 60-62.

[5] I. Kra, On lifting of Kleinian groups to $SL(2, \mathbb{C})$, in Differential Geometry and Complex Analysis (Rauch, H. E. Memorial Volume), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1985, 181-193.

[6] Y. Okumura, Global real analytic coordinates for Teichmüller Spaces, Doctor's Thesis, Kanazawa Univ., 1989.

[7] Y. Okumura, On the global real analytic coordinates for Teichmüller spaces, J. Math. Soc. Japan, 42(1990), 91-101.

[8] Y. Okumura, Global real analytic length parameters for Teichmüller spaces, Hiroshima Math. J., 26(1996), 165-179.

[9] Y. Okumura, Parametrizations of Teichmüller spaces, XVIth Rolf. Nevanlinna Colloquium, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1996, 181-190.

[10] Y. Okumura, 持ち上げ問題とリーマン面上の単純分割閉曲線の特徴付け, 平成 7 年度京都大学数理解析研究所共同研究集会 "Analysis of Discrete Groups"（研究代表者　奥村善英）の講究録 967 巻, 1996 年, 142-154 頁.

[11] Y. Okumura, Global real analytic angle parameters for Teichmüller spaces, J. Math. Soc. Japan, 49(1997), 213-229.

[12] Y. Okumura, Lifting problem of Fuchsian groups and a characterization of simple dividing loops on Riemann surfaces, in preparation.

[13] H. Petersson, Zur analytischen Theorie der Grenzkleisgruppen III, Math. Ann., 115(1938), 518-572.

[14] M. Seppälä and T. Sorvali, Traces of commutators of Möbius transformations, Math. Scand., 68(1991), 53-58.